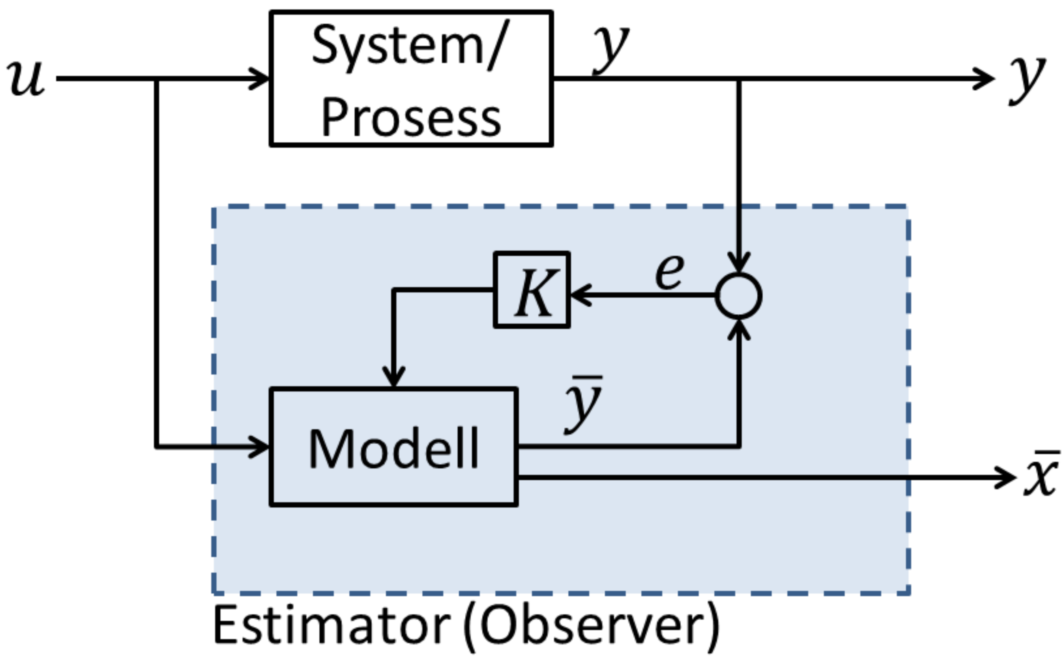
University College of Southeast Norway

Lecture Notes

Observer

HANS-PETTER HALVORSEN



http://home.hit.no/~hansha

Forord

Dette dokumentet tar for seg modellbasert regulering over temaet Observers og tilstandsestimering. Noen forenklinger er gjort underveis da det legges vekt på praktisk forståelse og implementering.

Notatet tar for seg praktisk bruk av Kalmanfilter og hvordan dette kan implementeres i LabVIEW og MathScript. LabVIEW og MathScript er gode engineering-verktøy som er velegnet til formålet da det finnes innebygd støtte for modellering, regulering, datainnsamling, m.m.. Det er også veldig enkelt å komme i gang med LabVIEW og MathScript, samt at disse kan brukes om hverandre eller integreres tett sammen.

I dette dokumentet vil det gis en rask innføring i Observerens oppbygging og virkemåte. Målet er å sette leseren i stand til å bruke og implementere en Observer i praksis vha en datamaskin. En Observer er tross alt ikke noe annet enn en algoritme som må implementeres i en datamaskin. Vi går igjennom konkrete eksempler på hvordan dette gjøres i **LabVIEW**.

Utgangspunktet for en Observer er en **matematisk modell** av systemet en står ovenfor. Jo bedre modellen er, jo bedre resultat får man. En må derimot alltid foreta avveininger mellom kompleksitet og ytelse.

Observers baserer seg på at du kan bestemme hvor raskt estimatene skal konvergere til de virkelige verdiene basert på å bestemme estimatorens egenverdier.

Et alternativ til Observers er Kalmanfilteret. Observers og Kalmanfilteret har den samme strukturen. Kalmanfilteret vil bli gjennomgått i et annet tilsvarende dokument.

Fordeler med tilstandsestimering - Fordelene med å benytte en tilstandsestimator er mange, f.eks:

- Ikke fysisk målbart - En tilstandsestimator kan beregne flere av systemets tilstandsvariable enn de som er fysisk målbare
- kostbart måleutstyr - En tilstandsestimator kan også beregne målbare tilstander fremfor å kjøpe inn kostbart måleutstyr
- Støy på målinger - En tilstandsestimator kan gi bedre estimat av målte tilstander da disse ofte er belagt med støy
- Feil med måleutstyr - En tilstandsestimator vil fortsette å gi fornuftige tilstandsestimater selv en tid etter at en eller flere målinger faller ut (prediksjon)

Eksempler:

- **Dynamisk Posisjonering (DP)**: En tilstandsestimator kan f.eks. beregne et skips hastighet selv om en kun måler skipets posisjon. Ved dynamisk posisjonering estimeres vannets strømningshastighet for bruk i en foroverkopling i posisjonsreguleringssystemet for fartøyene. Og de øvrige tilstandene posisjon og hastighet estimeres for bruk i situasjoner der det er manglende (feilaktige eller sjeldne) sensorsignaler fra f.eks. satellittbaserte sensorer (GPS).

- **Atomreaktor**: F.eks. temperaturen i en atomreaktor er fysisk umulig å måle pga. høye temperaturer.
- **Raketter og månelanding**: En tilstandsestimator ble brukt til å kontrollere kursen til rakettene i Apollo-programmet ifm. månelandingsprosjektet på 60-tallet. Som kjent landet Appollo 11 på månen 21. Juli 1969.
- **Annet**: Rakettstyring, værvarsling, havvarsling, oljeleting, bærekraftig utnytting av ressursene i havet og varsling av influensa-epidemier har minst én ting felles: Det handler om å bruke usikker informasjon (målinger) til å fatte mest mulig sikre beslutninger. I disse anvendelsene er tilstandsestimering (for eksempel Kalmanfilter) svært nyttig.

Merk! Forskjellige notasjon blir brukt om hverandre i ulike kilder:

$x(k)$

$x(t_k)$

x_k

→ Alle disse betyr det samme (dvs. verdien av tilstanden x i tidsskrittet k). Du kan bruke de som du synes er mest hensiktsmessig. I dette dokumentet blir de brukt litt om hverandre.

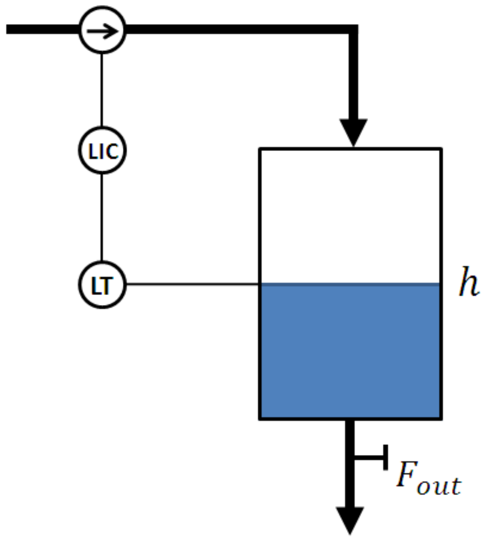
Innholdsfortegnelse

1 Innledning

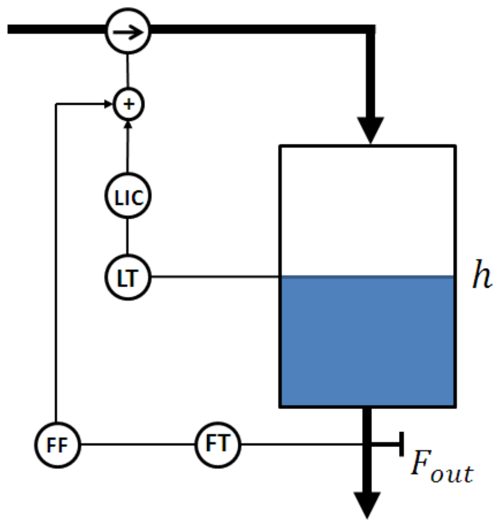
1.1 Eksempel

Vi ønsker å forbedre reguleringen av en vanntank, dvs. regulere nivået h i vanntanken. Vi måler nivået h i tanken og bruker en vanlig PID regulator til å regulere nivået (bildet til venstre). Det renner vann ut fra tanken i bunnen F_{out} som kan betraktes som en forstyrrelse og som gjør det vanskeligere å regulere nivået.

Tilbakekobling:



Foroverkobling:



Matematisk modell for systemet:

$$A_t\dot{h} = K_p u - F_{out}$$

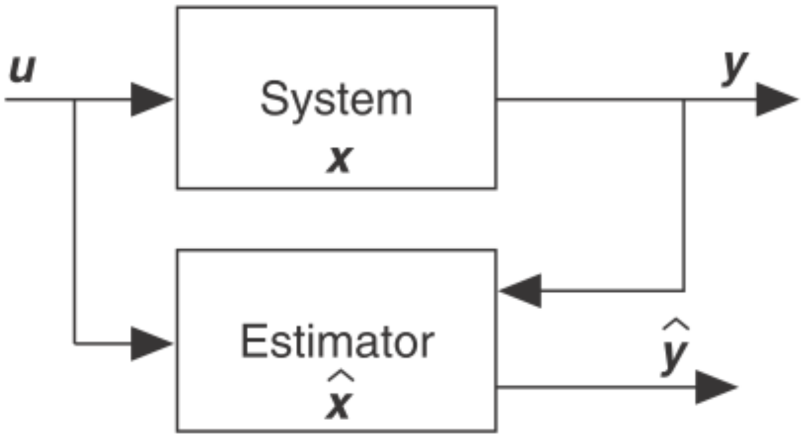
der A_t er arealet i tanken, K_p er pumpeforsterkning, u er pådraget, h er nivået i tanken, F_{out} er utstømningen fra tanken.

Vi ønsker å forbedre reguleringen av nivået ved å innføre en foroverkobling fra forstyrrelsen F_{out}, se figur til høyre. Problemet er at vi med dagens prosess ikke måler utstrømningen F_{out}, dermed ønsker vi å estimere denne, slik at dette estimatet kan inngå i reguleringen ved bruk av foroverkobling.

2 Observer

Teorien i dette kapitlet er delvis basert på [F. Haugen, Advanced Dynamics and Control: TechTeach, 2010].

Strukturen til en Observer kan enkelt skisseres slik:



[Figure: F. Haugen, Advanced Dynamics and Control: TechTeach, 2010]

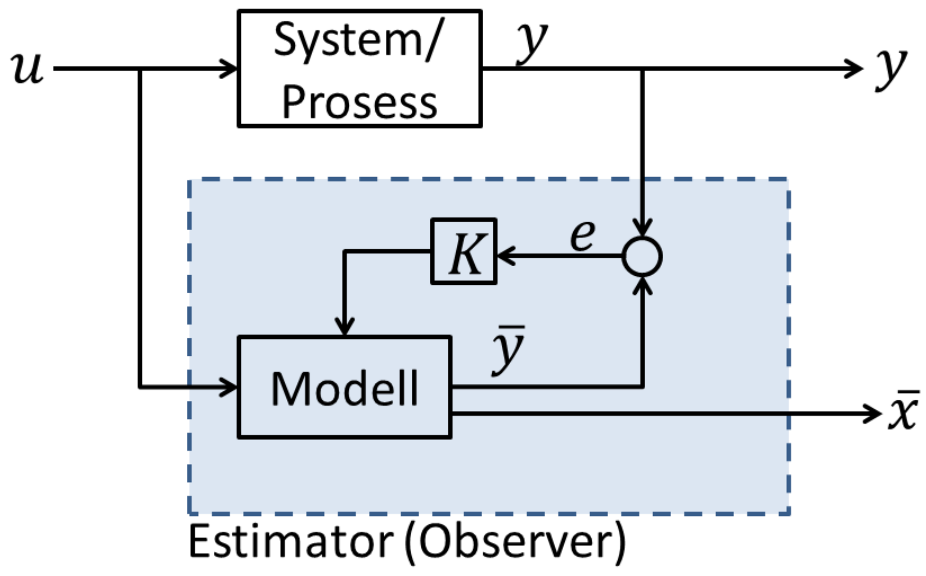
Observere baserer seg på at du kan bestemme hvor raskt estimatene skal konvergere til de virkelige verdiene basert på å bestemme estimatorens egenverdier.

Basert på **egenverdiene** vil du finne Observerforsterkningen K som brukes til å oppdatere estimatene.

En enkel mate å finne egenverdiene på er å bruke **Butterworth** egenverdiene fra Butterworth polynomet.

Når egenverdiene er funnet kan vi bruke **Ackerman** til å finne Observerforsterkningen K.

«LabVIEW Control Design and Simulation Module» har funksjonalitet for tilstandsestimering og Observers.



2.1 Kontinuerlig Observer

2.1.1 Prosess

Vi tar utgangspunkt i følgende system (virkelig prosess):

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$$

der w er prosess-støy og v er målestøy.

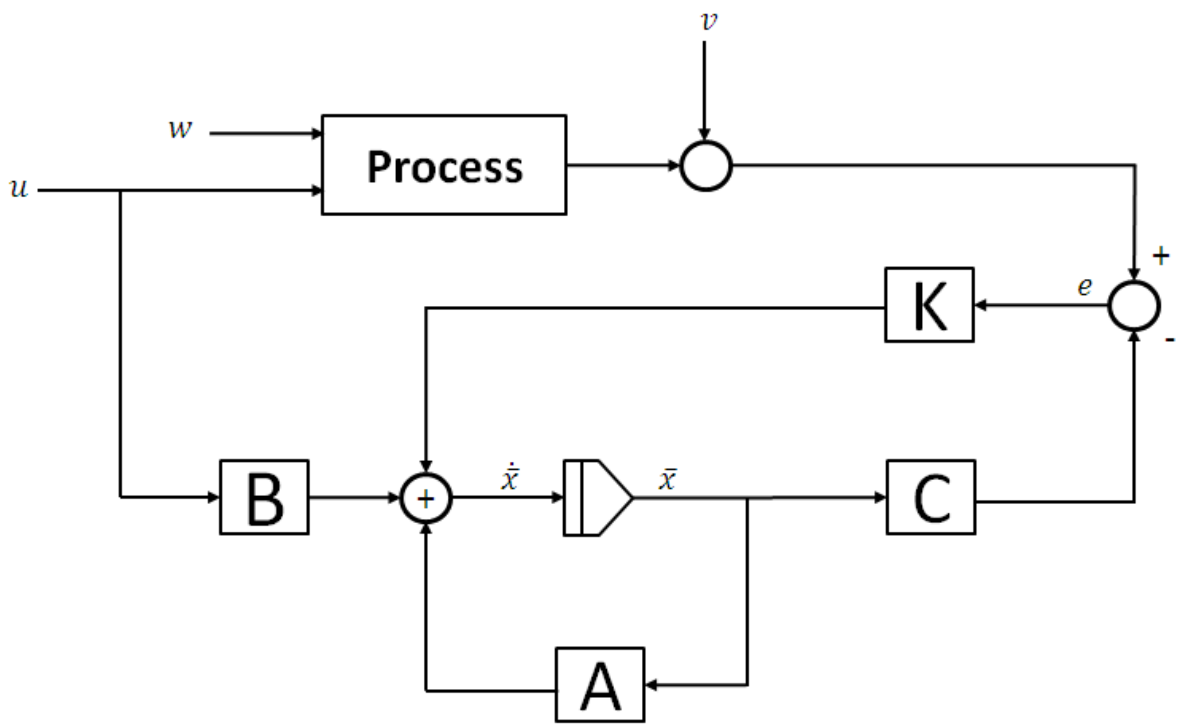
2.1.2 Estimator

Observeren (estimatoren) vil da ha følgende struktur:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{y}})$$

$$\bar{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{C}\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$$

Da kan vi tegne Observeren på følgende måte:



→ Dvs modellen oppdateres ved at man finner avviket mellom virkelige målinger og estimerte målinger. Dette multipliseres ved en forsterkningsmatrise K (Observerforsterkningen).

→ Målet vårt vil være å finne K matrisa som vi bruker i estimatoren.

Estimatorens dynamikk:

Vi ønsker å finne estimatorens dynamikk.

Utledning:

Innsatt får vi følgende:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu + K(y - (\underbrace{C\bar{x} + Du}_{y}))$$

$$\bar{y} = C\bar{x} + Du$$

dette blir (løser opp parentesene):

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu + Ky - KC\bar{x} - KDu$$

$$\bar{y} = C\bar{x} + Du$$

Tilslutt får vi:

$$\boxed{\begin{gathered}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \underbrace{(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{KC})}_{\boldsymbol{A_e}}\bar{\boldsymbol{x}} + (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{KD})\boldsymbol{u} + \boldsymbol{Ky} \\ \bar{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{C}\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{Du}\end{gathered}}$$

Dvs. systemmatrisen til Observeren (estimatoren) blir

$$\boxed{\boldsymbol{A_e \equiv A - KC}}$$

Observers baserer seg på at du kan bestemme hvor raskt estimatene skal konvergere til de virkelige verdiene basert på å bestemme estimatorens egenverdier.

Basert på egenverdiene vil du finne Observerforsterkningen K som brukes til å oppdatere estimatene. Vi finner Observerforsterkningen K ved å spesifisere egenverdiene til $A - KC$.

Det er mange måter å gjøre dette på, en enkel måte å finne egenverdiene på er å bruke **Butterworth** egenverdiene fra Butterworth polynomet. Mer om dette nedenfor.

2.1.3 Observerforsterkningen K

Observerforsterkningen $\boldsymbol{K}$ finnes ved å spesifisere egenverdiene til $\boldsymbol{A - KC}$

Egenverdiene til Observeren er gitt ved:

$$\boxed{\boldsymbol{det\big(sI - (A - KC)\big) = |sI - (A - KC)| = 0}}$$

I et senere kapittel vil vi bruke et såkalt Butterworth-polynom til å finne egenverdiene og Observerforsterkningen K.

Eksempel:

Gitt:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Observerforsterkningen $K\ (n\ x\ r)$ er:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

(n er antall tilstander, r er antall målinger)

Systemmatrisen til Observeren blir:

$$A - KC = \begin{bmatrix} a_1 - k_1 & 1 \\ a_2 - k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Den karakteristiske likning blir:

$$det\big(sI - (A - KC)\big) = \begin{vmatrix} s + k_1 - a_1 & -1 \\ k_2 - a_2 & s \end{vmatrix} = s^2 + (k_1 - a_1)s + k_2 - a_2$$

[Slutt på eksempel]

2.2 Diskret Observer

Prosess:

Vi tar utgangspunkt i følgende system (virkelig prosess):

$$\boldsymbol{x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k}$$

$$\boldsymbol{y_k = Cx_k + Du_k + v_k}$$

der w er prosess-støy og v er målestøy.

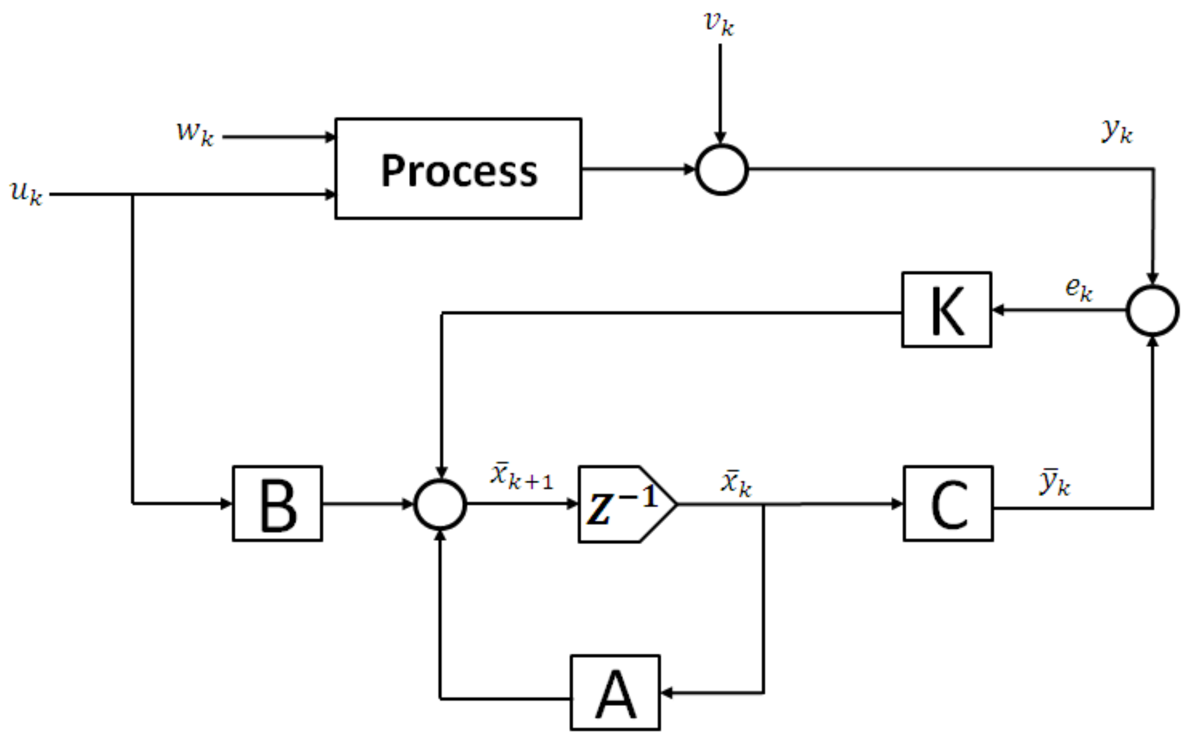
Estimator:

Observeren (estimatoren) vil da ha følgende struktur:

$$\boldsymbol{\bar{x}_{k+1} = A\bar{x}_k + Bu_k + K(y_k - \bar{y}_k)}$$

$$\boldsymbol{\bar{y}_k = C\bar{x}_k + Du_k}$$

Da kan vi tegne Observeren på følgende måte:



→ Utledninger og teori blir ellers det samme som for det kontinuerlige systemet.

3 Observerbarhet

Teorien i dette kapitlet er delvis basert på [F. Haugen, Advanced Dynamics and Control: TechTeach, 2010].

En nødvendig betingelse for å bruke en Observer er at systemet er observerbart.

Kontinuerlig system:

Gitt følgende kontinuerlige og lineære tilstandsrommodell:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Definisjon: Systemet er observerbart hvis systemet initialtilstander $x(t_0)$ kan bestemmes fra $y(t)$ over et endelig tidsintervall $[t_0, t_1]$.

Diskret system:

For et diskret har vi tilsvarende:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = Cx_k + Du_k$$

Definisjon: Systemet er observerbart hvis det finnes en endelig k slik at kjennskap til $u(0), \dots, u(k-1)$ og $y(0), \dots, y(k-1)$ er tilstrekkelig til å bestemme systemets initialtilstand $x(0)$.

Observerbarhetsmatrisen:

Observerbarhetsmatrisen er definert som:

$$\boxed{\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}$$

hvor n er systemets orden, dvs. antall tilstander i tilstandsrommodellen.

→ Et system med orden n er observerbart hvis $\mathcal{O}$ har full rang, dvs. rangen til $\mathcal{O}$ er lik n.

$$\boldsymbol{rang(\mathcal{O}) = n} \rightarrow Observerbart$$

→ Rangen kan sjekkes ved å finne determinanten til $\mathcal{O}$. Hvis determinanten er ulik null, har $\mathcal{O}$ full rang og systemet er dermed observerbart.

$$\boldsymbol{det(\mathcal{O})} \neq 0 \rightarrow Observerbart$$

3.1.1 Utledning av Observerbarhetsmatrisen

Vi utleder Observerbarhetsmatrisen for et diskret system. Observerbarhet kan defineres slik:

Systemet gitt av:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = Cx_k + Du_k$$

er observerbart hvis det finnes en endelig k slik at kjennskap til $u(0), \ldots, u(k-1)$ og $(0), \ldots, y(k-1)$ er tilstrekkelig til å bestemme systemets initialtilstand $x(0)$.

Utledning:

Vi antar $u(k) = 0$, det gir:

$$x_{k+1} = Ax_k$$

$$y_k = Cx_k$$

Vi får da:

	$y(0) = Cx(0)$
$x(1) = Ax(0)$	$y(1) = Cx(1) = CAx(0)$
$x(2) = Ax(1) = AAx(0) = A^2x(0)$	$y(2) = Cx(2) = CA^2x(0)$
…	…
$x(n-1) = A^{n-1}x(0)$	$y(n-1) = Cx(n-1) = CA^{n-1}x(0)$

Dette gir:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}_{\equiv \mathcal{O}} x(0)$$

3.1.2 Eksempler

Nedenfor går vi gjennom noen eksempler for å finne observerbarhetsmatrisen, samt sjekke om systemene er observerbare.

Eksempel:

Gitt følgende system:

$$x_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} x_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B} u_k$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x_k + \underbrace{[0]}_{D} u_k$$

Får da følgende Observerbarhetsmatrise for dette systemet ($n = 2$):

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2 & 1] \\ [2 & 1]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ (2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)) & (2 \cdot 1 + 1 \cdot 2) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}}$$

I **MathScript** kan vi bruke funksjonene **obsv() det()** og **rank()**

MathScript kode:

```
A = [1, 1; -1, 2]
B = [1, 2]'
C = [2, 1]
D = 0
system = ss(A, B, C, D)

Ob = obsvmx(system)
d = det(Ob)
r = rank(Ob)
```

som gir:

```
Ob = 2    1

      1    4

d = 7 (determinant)

r = 2 (rang)
```

[Slutt på eksempel]

Eksempel:

Vi ønsker å estimere tilstandene i en elektrisk likestrømsmotor vha en Observer.

Motoren kan beskrives ved følgende tilstandsrommodell:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

der x_1 er posisjonen (til akslingen) og x_2 er hastigheten til motoren. Vi måler kun posisjonen og dermed ønsker vi å estimere motorens hastighet.

Vi må derfor finne ut om systemet er observerbart.

Observerbarhetsmatrisen er definert som følger:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

der n er antall tilstander.

Observerbarhetsmatrisen blir som følger for dette systemet:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathrm{C} \\ \mathrm{CA} \end{bmatrix}$$

Vi får da:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dette gir følgende Observerbarhetsmatrise:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathrm{C} \\ \mathrm{CA} \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Et system med orden n er observerbart hvis O har full rang, dvs rangen til O er lik n.

$$rang(\mathcal{O}) = n \rightarrow Observerbart$$

Rangen kan sjekkes ved å finne determinanten til O. Hvis determinanten er ulik null, har O full rang og systemet er dermed observerbart.

$$det(\mathcal{O}) \neq 0 \rightarrow Observerbart$$

Slik finner vi determinanten for et $2x2$ system:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$det(A) = |A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Vi finner determinanten til $\mathcal{O}$:

$$\det(\mathcal{O}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

→ Vi ser at $\det(\mathcal{O}) \neq 0$ → <u>Systemet er observerbart</u>

Anta

$$y = x_2$$

der x_2 er hastigheten til motoren.

Vi ønsker å finne observerbarhetsmatrisen og sjekke om systemet er observerbart nå.

Observerbarhetsmatrisen blir som følger:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathrm{C} \\ \mathrm{CA} \end{bmatrix}$$

Vi får da:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Dette gir følgende observerbarhetsmatrise:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathrm{C} \\ \mathrm{CA} \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}$$

Determinanten blir da:

$$det(\mathcal{O}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1) - 0 \cdot 1 = \underline{0}$$

→ Vi ser at $\det(\mathcal{O}) = 0$ → Systemet er <u>ikke</u> observerbart!

Forklaring:

Av definisjonen har vi at et system er observerbart hvis systemet initialtilstander $x(t_0)$ kan bestemmes fra $y(t)$ over et endelig tidsintervall $[t_0, t_1]$.

Altså:

$y = x_2$: I dette tilfellet måler vi altså hastigheten, men dette gir ingen informasjon om posisjonen. Dette viser altså at systemet <u>ikke</u> er observerbart når vi krever informasjon om begge tilstandsvariablene.

$y = x_1$: I dette tilfellet måler vi posisjonen. Hastigheten kan vi enkelt finne ved å ta den deriverte av posisjonen. Systemet er observerbart fordi hastigheten påvirker posisjonen og dermed måleverdien.

[Slutt på eksempel]

4 Observerforsterkningen K

Teorien i dette kapitlet er delvis basert på [F. Haugen, Advanced Dynamics and Control: TechTeach, 2010].

Observerforsterkningen $\boldsymbol{K}$ finnes ved å spesifisere egenverdiene til $\boldsymbol{A - KC}$

Egenverdiene til Observeren er gitt ved:

$$\boxed{\boldsymbol{det\big(sI - (A - KC)\big) = |sI - (A - KC)| = 0}}$$

Vi vil finne egenverdiene til estomatoren vha Butterwortpolynomet.

4.1 Butterworth polynom

En enkel måte å finne egenverdiene på er å bruke **Butterworth** egenverdiene fra Butterworth polynomet.

Butterworth polynomet er definer som følger:

$$\boxed{\boldsymbol{B_n(s) = a_n s^n + \ \dots + a_2 s^2 + a_1 s + 1}}$$

hvor $a_0 = 1, a_1, a_2, \dots, a_n$ er koeffisienter i Butterworth polynomet.

Koeffisienter i Butterworth polynomet vil være forskjellig med tanke på hvilken orden polynomet har. Disse konstantene kan finnes ved å slå opp i litteraturen/Internett. Vi kan også finne koeffisientene ved å bruke innebygde funksjoner i f.eks. MathScript/LabVIEW.

4.1.1 2.ordens Butterworth polynom

Et 2.ordens Butterworth polynom er definert som:

$$B_2(s) = a_2 s^2 + a_1 s + 1$$

hvor $a_0 = 1, a_1 = \sqrt{2}T, a_2 = T^2$.

Dette gir følgende 2.ordens Butterworth polynom:

$$\boxed{\boldsymbol{B_2(s) = T^2 s^2 + \sqrt{2}Ts + 1}}$$

Parameteren T brukes til å definere responstiden, mer om dette senere.

Eksempel:

Gitt følgende system:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

A 2.order Butterworth polynom er gitt ved:

$$B_2(s) = T^2 s^2 + \sqrt{2} T s + 1$$

Vi ønsker å finne Observerforsterkningen K. Vi starter med å finne Observerbarhetsmatrisen samt sjekke om systemet er observerbart.

Løsning:

Observerbarhetsmatrisen:

Observerbarhetsmatrisen er gitt som:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

hvor n er systemets orden, dvs antall tilstander i tilstandsrommodellen.

Vi får da for vårt system ($n = 2$):

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathrm{C} \\ \mathrm{CA} \end{bmatrix}$$

hvor:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dette gir følgende Observerbarhetsmatrise:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathrm{C} \\ \mathrm{CA} \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Er systemet observerbart?

Systemet er observerbar hvis $det(\mathcal{O}) \neq 0$

Vi finner determinanten til $\mathcal{O}$:

$$det(\mathcal{O}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

→ Vi ser at systemet er observerbart

Observerforsterkningen:

Vi finnner deretter Observerforsterkningen $K\ (n\ x\ r)$:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

Vi har:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Systemmatrisen til Observeren (estimatoren) blir:

$$A - KC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & -1 \end{bmatrix}$$

Den karakteristiske likning blir:

$$det\big(sI - (A - KC)\big) = det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & -1 \end{bmatrix}\right) = det\begin{pmatrix} s + k_1 & -1 \\ k_2 & s + 1 \end{pmatrix}$$

Videre:

$$det\big(sI - (A - KC)\big) = (s + 1)\ (s + k_1) + k_2$$

$$= s^2 + s\, k_1 + s + k_1 + k_2 = \underline{s^2 + (k_1 + 1)s + k_1 + k_2}$$

Et 2.ordens Butterworth polynom har følgende karakteristiske polynom:

$$B_2(s) = T^2 s^2 + \sqrt{2} T s + 1$$

eller

$$B_2(s) = T^2 \underline{\left(s^2 + \frac{\sqrt{2}}{T} s + \frac{1}{T^2}\right)}$$

<u>Butterworthfilterets karakteriske polynom og Observerens karakteristiske polynom er nå på samme form, og vi kan sammenligne ledd for ledd</u>:

$$(k_1 + 1) = \frac{\sqrt{2}}{T}, \qquad k_1 + k_2 = \frac{1}{T^2}$$

Dette gir:

$$k_1 = \frac{\sqrt{2}}{T} - 1$$

$$k_2 = \frac{1}{T^2} - \frac{\sqrt{2}}{T} + 1$$

Observerforsterkningen K blir da:

$$\underline{K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{T} - 1 \\ \frac{1}{T^2} - \frac{\sqrt{2}}{T} + 1 \end{bmatrix}}$$

Mer om hvordan vi finner T i neste avsnitt.

[Slutt på eksempel]

Eksempel:

Gitt:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Observerforsterkningen $K \ (n \ x \ r)$ er:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

Systemmatrisen til Observeren blir:

$$A - KC = \begin{bmatrix} a_1 - k_1 & 1 \\ a_2 - k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Den karakteristiske likning blir:

$$det\big(sI - (A - KC)\big) = \begin{vmatrix} s + k_1 - a_1 & -1 \\ k_2 - a_2 & s \end{vmatrix} = \underline{s^2 + (k_1 - a_1)s + k_2 - a_2}$$

Et 2.ordens Butterworth filter har følgende karakteriske polynom:

$$B_2(s) = T^2 s^2 + \sqrt{2} T s + 1 = T^2 (\underline{s^2 + \frac{\sqrt{2}}{T} s + \frac{1}{T^2}})$$

<u>Butterworthfilterets karakteriske polynom og Observerens karakteristiske polynom er nå på samme form, og vi kan sammenligne ledd for ledd</u>:

$$k_1 - a_1 = \frac{\sqrt{2}}{T}, \qquad k_2 - a_2 = \frac{1}{T^2}$$

Dette gir:

$$k_1 = a_1 + \frac{\sqrt{2}}{T}$$

$$k_2 = a_2 + \frac{1}{T^2}$$

Observerforsterkningsmatrisen K blir dermed:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + \frac{\sqrt{2}}{T} \\ a_2 + \frac{1}{T^2} \end{bmatrix}$$

Mer om hvordan vi finner T i neste avsnitt.

[Slutt på eksempel]

4.1.2 Høyere ordens Butterworth polynomer

Høyere ordens polynomer:

$$B_1(s) = Ts + 1$$

$$B_2(s) = (Ts)^2 + \sqrt{2}(Ts) + 1 = T^2s^2 + \sqrt{2}Ts + 1$$

$$B_3(s) = (Ts)^3 + 2(Ts)^2 + 2(Ts) + 1 = T^3s^3 + 2T^2s^2 + 2Ts + 1$$

$$\dots$$

→ Det finnes tabeller man kan slå opp i for å finne koeffisientene for høyere ordens Butterworth polynomer, eller man kan bruke ferdige funksjoner som finnes i MathScript og LabVIEW. For et såkalt normalisert Butterworth filter er $T = 1$.

Eksempel – 3.ordens system:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 \\ a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observerforsterkningen $K\ (n\, x\, r)$ er:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

→ Finn K (Bruk et 3.ordens Butterworth filter)

Systemmatrisen til Observeren blir:

$$A - KC = \begin{bmatrix} a_1 - k_1 & 1 & 0 \\ a_2 - k_2 & 0 & 1 \\ a_3 - k_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Den karakteristiske likning blir:

$$\det\big(sI - (A - KC)\big) = \begin{vmatrix} s + k_1 - a_1 & -1 & 0 \\ k_2 - a_2 & s & -1 \\ k_3 - a_3 & 0 & s \end{vmatrix} = \underline{s^3 + (k_1 - a_1)s^2 + (k_2 - a_2)s + k_3 - a_3}$$

Et 3.ordens Butterworth filter har følgende karakteriske polynom:

$$B_3(s) = T^3s^3 + 2T^2s^2 + 2Ts + 1 = T^3\underline{(s^3 + \frac{2}{T}s^2 + \frac{2}{T^2}s + \frac{1}{T^3})}$$

Butterworth filterets karakteriske polynom og Observerens karakteristiske polynom er nå på samme form, og vi kan sammenligne ledd for ledd:

$$k_1 - a_1 = \frac{2}{T}, \qquad k_2 - a_2 = \frac{2}{T^2}, \qquad k_3 - a_3 = \frac{1}{T^3}$$

Dette gir:

$$k_1 = a_1 + \frac{2}{T}$$

$$k_2 = a_2 + \frac{2}{T^2}$$

$$k_3 = a_3 + \frac{1}{T^3}$$

Observerforsterkningsmatrisen K blir dermed:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + \frac{2}{T} \\ a_2 + \frac{2}{T^2} \\ a_3 + \frac{1}{T^3} \end{bmatrix}$$

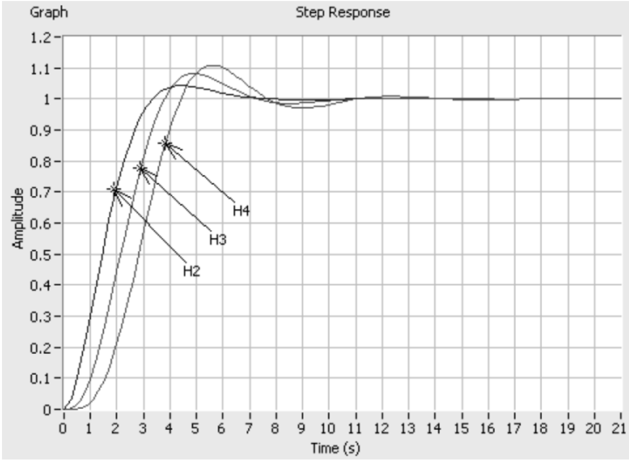
[Slutt på eksempel]

4.2 Hvordan finne K?

Fra forrige avsnitt ser vi at Observerforsterkningen K vil være en funksjon av T som vi får fra Buttorworthfilteret. Sp vi ønsker å finne ut hvordan vi kan spesifisere er verdi for T.

Vi tar utgangspunkt i Butterworth-filtere med ulike orden.

Vi plotter (sprangrespons) et normalisert Butterworth filter ($T = 1$) med orden $2, 3\ og\ 4$:



[Figure: F. Haugen, Advanced Dynamics and Control: TechTeach, 2010]

Ut fra figuren over ser vi at vi kan bruke følgende tilnærming:

$$\boxed{\boldsymbol{T_r \approx nT}}$$

dvs:

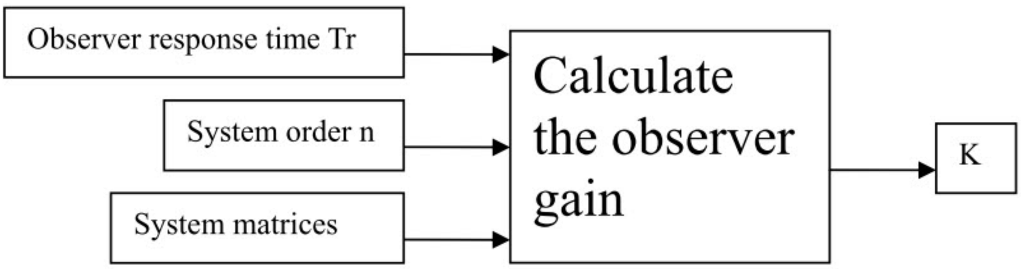
$$\boxed{\boldsymbol{T_r \approx nT \leftrightarrow T = \frac{T_r}{n}}}$$

(n er lik antall tilstander)

$\boldsymbol{T_r}$ er definert som tidsresponsen der Observeren når % av den statiske verdien til responsen.

→ **Det betyr at vi vil bruke $\boldsymbol{T_r}$ som den eneste tuningsparameteren til Observeren**.

Nedenfor ser vi en enkel skisse over hvilken informasjon som trengs for å beregne K.



[Figure: F. Haugen, Advanced Dynamics and Control: TechTeach, 2010]

MathScript:

I MathScript kan vi bruke funksjonen **roots()** for å finne røttene basert på Butterworth polynomet.

Deretter bruker vi bruke funksjonen **acker()** for å finne Observerforsterkningen K basert på egenverdiene funnet fra Butterworth polynomet vha roots() funksjonen.

Vi kan også bruke funksjonen **obsvmx()** for å finne Observerbarhetsmatrisen, deretter funksjonene **det()** og **rank()** for å sjekke om systemet er observerbart.

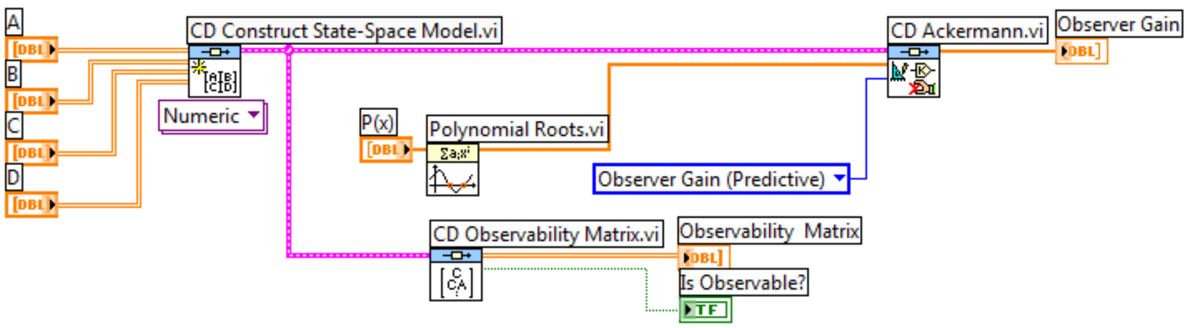
```
…
Ob = obsvmx(model)
d = det(Ob)
r = rank(Ob)

eigenvalues = roots(B2);

K = acker(A,C,eigenvalues,'o') %o for observer
```

LabVIEW:

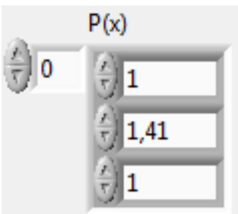
I LabVIEW kan vi bruke "**Polynomial Roots.vi**" for å finne røttene basert på Butterworth polynomet.

Vi bruker deretter "**Ackerman.vi**" for å finne Observerforsterkningen K basert på egenverdiene funnet fra Butterworth polynomet.

Vi kan også bruke "**Observability Matrix.vi**" for å finne Observerbarhetsmatrisen og å sjekke om systemet er observerbart.



der P(x) kan defineres som en vektor/1-D array på Frontpanelet slik:



der vi setter inn koeffisientene i Butterworthpolynomet, i dette tilfellet et 2.ordens polynom med $T = 1$.

$$B_2(s) = T^2s^2 + \sqrt{2}Ts + 1$$

Eksempel:

Gitt følgende system:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

med følgende verdier:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x$$

→ Vi ønsker å finne Observerforsterkningen K for dette systemet.

Observerforsterkningen $K\ (n\ x\ r)$ er gitt som:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

Systemmatrisen til Observeren blir:

$$A - KC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Den karakteristiske likning blir:

$$\det\big(sI - (A - KC)\big) = \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix} \right) = \det\left(\begin{bmatrix} s+k_1 & -1 \\ k_2 & s \end{bmatrix} \right)$$

Dette gir:

$$\det\big(sI - (A - KC)\big) = \begin{vmatrix} s+k_1 & -1 \\ k_2 & s \end{vmatrix} = s(s+k_1) + k_2 = \underline{s^2 + k_1 s + k_2}$$

Vi benytter et 2.ordens Butterworth filter som har følgende karakteriske polynom:

$$B_2(s) = T^2 s^2 + \sqrt{2} T s + 1 = T^2 \underline{(s^2 + \frac{\sqrt{2}}{T} s + \frac{1}{T^2})}$$

Butterworthfilterets karakteriske polynom og Observerens karakteristiske polynom er nå på samme form, og vi kan sammenligne ledd for ledd som gir:

$$k_1 = \frac{\sqrt{2}}{T}$$

$$k_2 = \frac{1}{T^2}$$

Observerforsterkningsmatrisen K blir dermed:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{T} \\ \frac{1}{T^2} \end{bmatrix}$$

Vi har at:

$$\boxed{\boldsymbol{T_r \approx nT \leftrightarrow T = \frac{T_r}{n}}}$$

Vi setter $\boldsymbol{T_r = 2s}$ og $\boldsymbol{n = 2}$ (n er lik antall tilstander).

Dette gir:

$$T = \frac{2\text{s}}{2} = \underline{1\text{s}}$$

Som gir følgende K:

$$k_1 = \frac{\sqrt{2}}{T} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \approx \underline{1.41}$$

$$k_2 = \frac{1}{T^2} = \frac{1}{1^2} = \underline{1}$$

Så hvordan løser vi dette i praksis? La oss bruke MathScript for å se om vi finner det samme svaret.

MathScript:

Følgende kode finner Observerforsterkningen K ved bruk av Butterworthpolynomet og den innebygde funksjonen *acker()*:

```
A = [0, 1; 0, 0];
B = [0; 1];
C = [1, 0];
D = [0];

n = 2;
Tr = 2;

T = Tr/n;
B2 = [T*T, 1.4142*T, 1];

eigenvalues = roots(B2);
K = acker(A,C,eigenvalues,'o') %o for observer
```

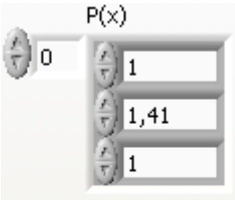
Som gir følgende svar:

```
K =   1.4142

      1
```

Programmet kan forøverig enkelt forandres slik at vi finner K for andre verdier av T_r.

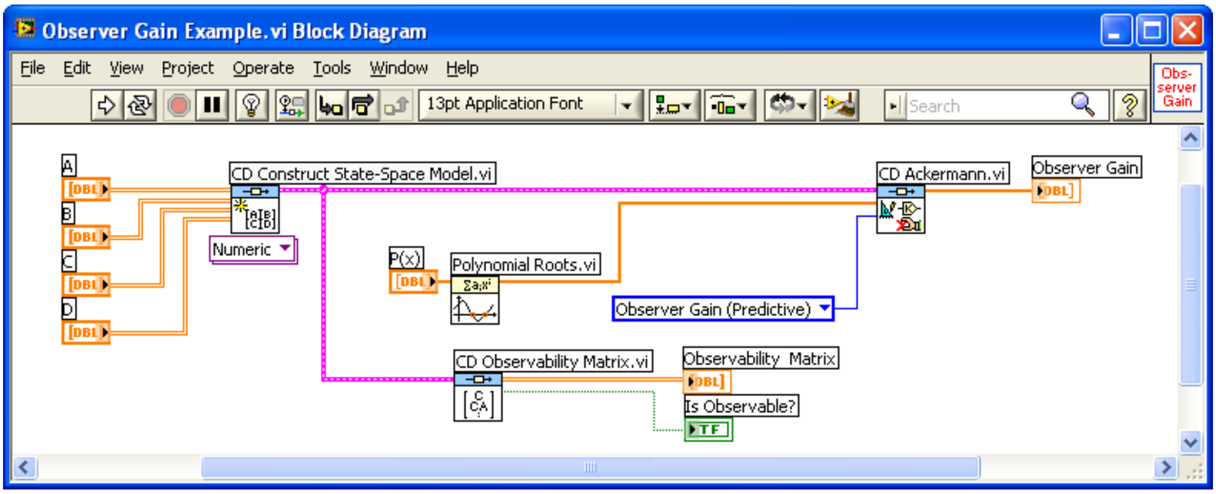
LabVIEW:

I LabVIEW kan vi definer koeffisientene i polynomet som følger (en array):

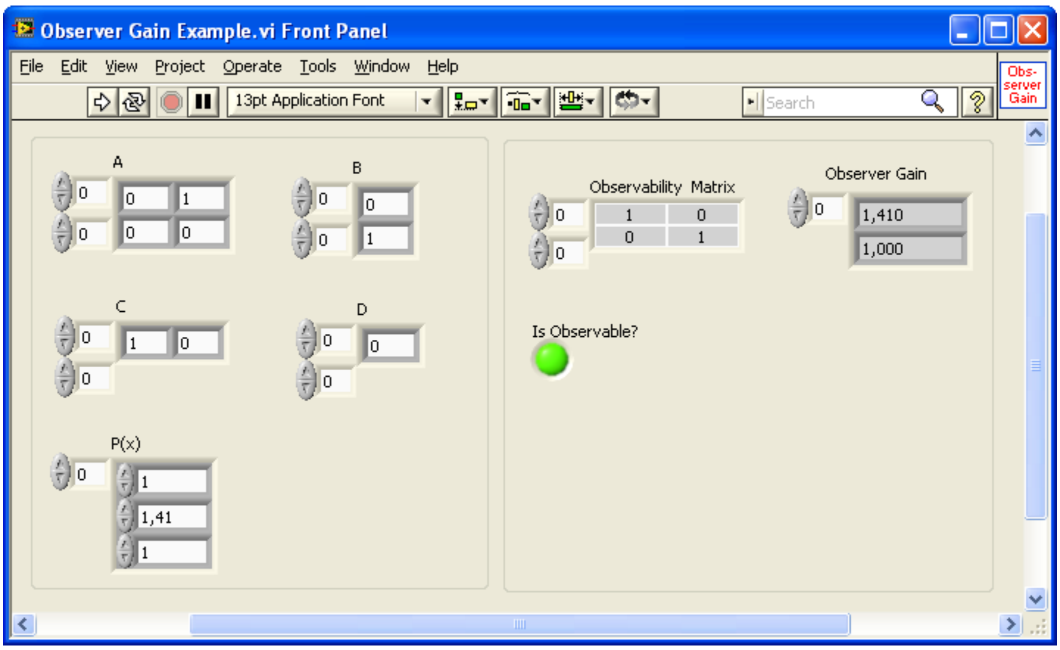


Tilslutt bruker vi “**Ackermann.vi**” for å finne Observerforsterkningen K.

Her ser vi blokkdiagrammet:



Frontpanelet ser slik ut:



→ Som du ser får vi samme resultat både når vi regner på dette og når vi løser dette ved å bruke MathScript eller LabVIEW.

[Slutt på eksempel]

5 Algoritme for implementering i en datamaskin

Teorien i dette kapitlet er delvis basert på [F. Haugen, Advanced Dynamics and Control: TechTeach, 2010].

Basert på likningene foran kan vi presentere følgende algoritme som er egnet til å bli implementert i en datamaskin.

Den generelle Observer-algoritmen er som følger:

Steg 1: Finn måleestimatet

$$\boldsymbol{\bar{y}_k = g(\bar{x}_k, u_k)}$$

For lineære systemer:

$$\bar{y}_k = C\bar{x}_k + Du_k$$

Steg 2: Finn estimator-avviket

$$\boldsymbol{e_k = y_k - \bar{y}_k}$$

Steg 3: Finn det korrigerte og predikerte (fremtidige) tilstandsestimatet

$$\boldsymbol{\bar{x}_{k+1} = f(\bar{x}_k, u_k) + Ke_k}$$

For lineære systemer

$$\bar{x}_{k+1} = A\bar{x}_k + Bu_k + Ke_k$$

Merk! i F.eks. LabVIEW finnes det også implementert ferdige algoritmer (funksjoner) man kan benytte seg av.

Observerforsterkningen K finner vi vha Butterworth polynomet og f.eks. Ackerman som vist i forrige kapittel. Dette finnes det også ferdige funksjoner for i LabVIEW.

Hvordan man kan bruke de ferdige funksjonene som finnes i LabVIEW blir demonstrert i neste kapittel.

Eksempel:

Gitt følgende diskrete system:

$$x_1(k+1) = (1 - 2T_s)x_1(k) + 6T_s u(k)$$

$$x_2(k+1) = 2T_s x_1 + x_2(k)$$

$$y(k) = x_2(k)$$

Samt at Observerforsterkningen er gitt ved:

$$K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}$$

Vi får da:

Steg 1: Finn måleestimatet

$$\bar{y}(k) = \bar{x}_2(k)$$

Steg 2: Finn estimator-avviket

$$e(k) = y(k) - \bar{y}(k)$$

Steg 3: Finn det korrigerte og predikerte (fremtidige) tilstandsestimatet

$$\bar{x}_1(k+1) = (1 - 2T_s)\bar{x}_1(k) + 6T_s u(k) + K_1 e(k)$$

$$\bar{x}_2(k+1) = 2T_s\bar{x}_1 + \bar{x}_2(k) + K_2 e(k)$$

→ Disse kan enkelt implementeres i en datamaskin i en løkke (While Loop).

Denne fremgangsmåten gjelder både for lineære og ulineære systemer.

Men siden systemet i dette eksemplet er lineært kan vi også implementere det slik (lineær tilstandsromform):

Steg 1: Finn måleestimatet

$$\bar{y}_k = C\bar{x}_k + Du_k$$

Steg 2: Finn estimator-avviket

$$e_k = y_k - \bar{y}_k$$

Steg 3: Finn det korrigerte og predikerte (fremtidige) tilstandsestimatet

$$\bar{x}_{k+1} = A\bar{x}_k + Bu_k + Ke_k$$

der

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 - 2T_s & 0 \\ 2T_s & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 6T_s \\ 0 \end{bmatrix}, \mathrm{C} = [0 \quad 1], \mathrm{D} = [0]$$

→ I f.eks LabVIEW eller MATLAB/MathScript er enkelt å gjøre dette.

[Slutt på eksempel]

6 Praktisk implementering

«LabVIEW Control Design and Simulation Module» har masse innebygget funksjonalitet for Observers og tilstandsestimering generelt (Kalmanfilter, m.m.).

6.1 Observerbarhet

En nødvendig betingelse for at Observeren skal virke ordentlig er at systemet er observerbart, derfor bør du alltid sjekke om systemet er observerbart først.

Observerbarhetsmatrisen er definert som:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

hvor n er systemets orden, dvs antall tilstander i tilstandsrommodellen.

→ Rangen kan sjekkes ved å finne determinanten til $\boldsymbol{O}$. Hvis determinanten er ulik null, har $\boldsymbol{O}$ full rang og systemet er dermed observerbart.

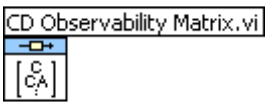
$$\boldsymbol{det(O) \neq 0 \rightarrow Observerbart}$$

<u>LabVIEW:</u>

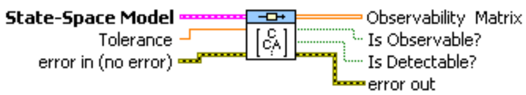
I "LabVIEW Control Design and Simulation Module" kan vi bruke "**Observability Matrix.vi**" for å finne observerbarhetsmatrisen og sjekke om systemet er observerbart.

Funksjonen finnes i funksjonspaletten til LabVIEW:

Control Design & Simulation → Control Design → State-Space Model Analysis → CD Observability Matrix.vi



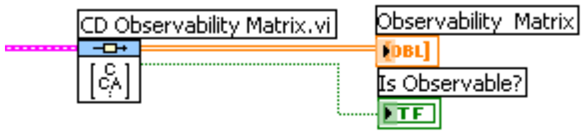
CD Observability Matrix.vi



Calculates the **Observability Matrix** of the **State-Space Model**. You can use the observability matrix **N** to determine if the given system is observable. A system of order n is observable if **N** is full rank, meaning the rank of **N** is equal to n. This VI also determines if the given system is detectable. A system is detectable if all the unstable eigenvalues are observable.

Merk! LabVIEW bruker betegnelsen N på Observerbarhetsmatrisa.

LabVIEW:



MathScript:

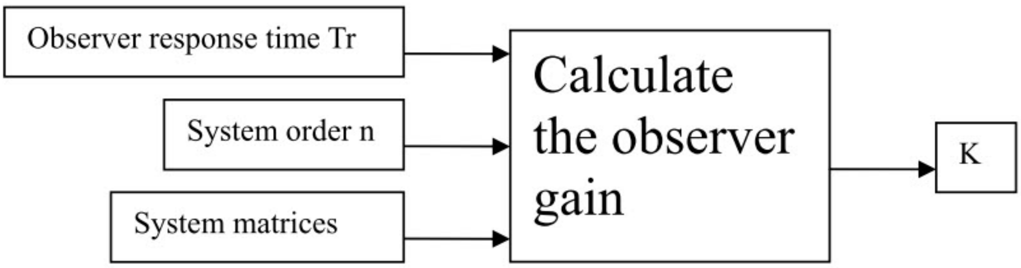
I MathScript kan du bruke funksjonen **obsvmx()** for å finne Observerbarhetsmatrisa. Deretter kan du bruke funksjonene **rank()** eller **det()** for å sjekke om systemet er observerbart.

Eksempel:

```
% Check for Observability:
O = obsvmx (discretemodel)
r = rank(O)
d = det(O)
```

6.2 Observerforsterkningen

Følgende trengs for å finne Observerforsterkningen:



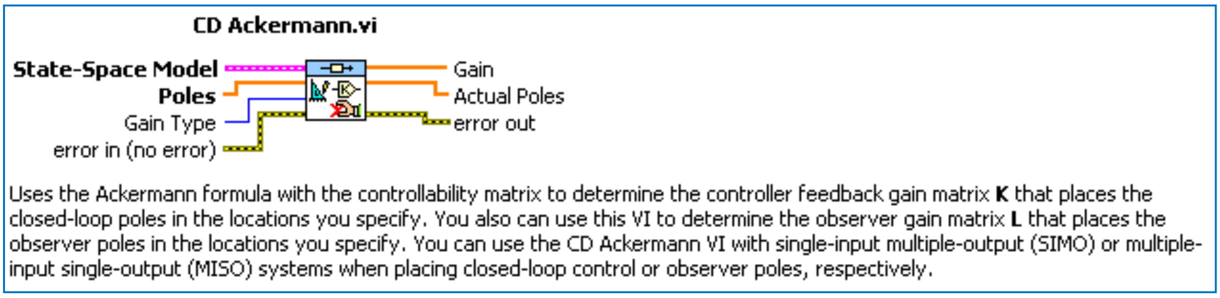
[Figure: F. Haugen, Advanced Dynamics and Control: TechTeach, 2010]

LabVIEW:

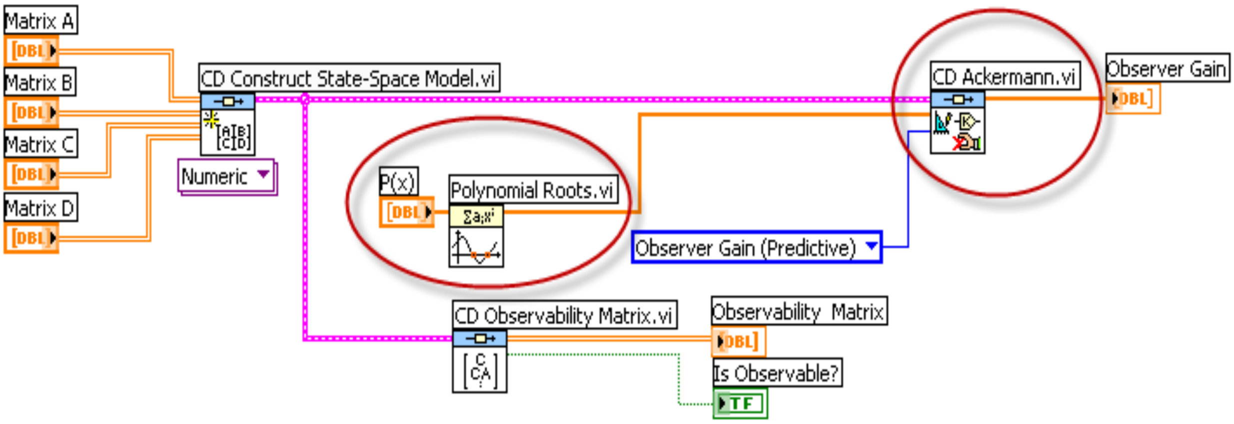
I LabVIEW kan vi bruke funksjonen "**Ackerman.vi**" til å finne Observerforsterkningen K basert på egenverdier funnet fra Butterworth polynomet.

Funksjonen finnes i funksjonspaletten til LabVIEW:

Control Design & Simulation → Control Design → State Feedback Design → Ackerman.vi



Eksempel:

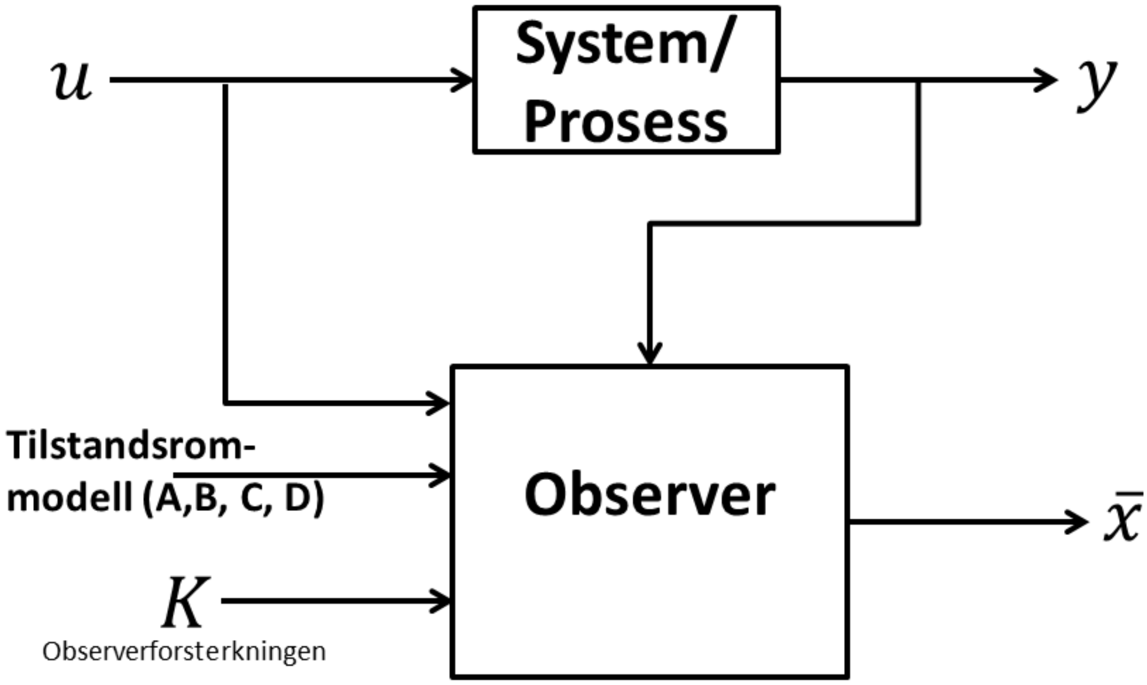


MathScript:

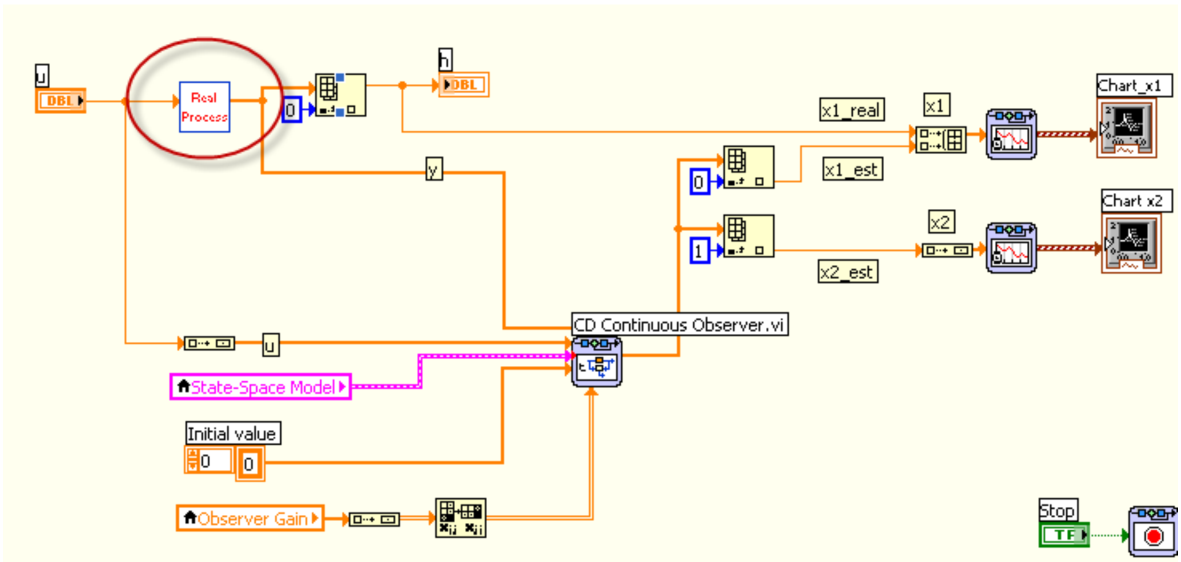
I MathScript kan vi bruke ***acker()*** funksjonen til å finne Observerforsterkningen K basert på egenverdier funnet fra Butterworth polynomet.

6.3 Observeralgoritmen

Skissen nedenfor viser hvordan vi implementerer en Observer:



LabVIEW har flere innebygde Observer-funksjoner, f.eks "**Continuous Observer.vi**".



7 Alternativer - Kalmanfilter

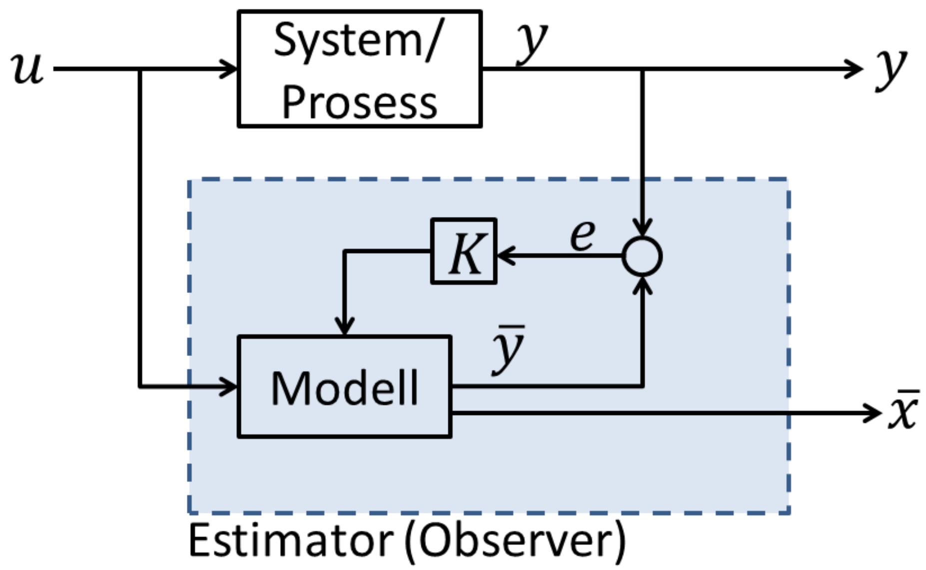
Et alternativ til Observere er Kalmanfilteret. Disse har samme struktur.

Fordeler/ulemper Kalmanfilter/Observers:

- Teori og implementering for Observere er enklere enn for Kalmanfilter
- Det er ikke rett frem å implementere Observere for systemer som har flere enn en måling, dette er derimot rett frem ifm. Kalmanfilter
- Observere tar ikke hensyn til støyforholdene

Både Kalmanfilteret og Observeren er tilstandsestimatorer som bruker en matematisk modell av systemet. Begge metodene bruker en forsterkningsmatrise K til å oppdatere estimatene. Hovedforskjellen er at de bruker ulike metoder til å finne forsterkningsmatrisa K.

Oversiktsskisse:



Oppsummert får kan vi sette opp følgende:

Kalmanfilter	Observer
Mål: Finne optimal K	Mål: Finne K basert på egenverdier
Teorien og matematikken bak Kalmanfilteret er ganske komplisert	Teorien bak Observere er forholdsvis enkel
Rett frem å implementere når man har flere enn en måling	Mer komplisert å implementere når mann har flere enn en måling
Tar hensyn til støy	Tar ikke hensyn til støy

Tuningsparametere: Q R	Tuningsparameter: T_r

8 Matematisk bakgrunn

8.1 Egenverdier

Gitt en matrise A.

Egenverdiene til A er gitt ved:

$$\boxed{\boldsymbol{det(sI - A) = |sI - A| = 0}}$$

$\det(sI - A) = 0$ kalles den **karakteristiske likning** og løsningene til denne likningen kalles egenverdiene til A.

Polynomet $\det(sI - A)$ er definert som det **karakteristiske polynom.**

Eksempel:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Egenverdiene blir:

$$det(\cdots) = 0$$

dette gir:

$$s_1 = -1, \qquad s_2 = -2$$

MathScript:

I MathScript kan vi bruke funksjonen eig()

```
A=[-1, 2; 0, -2];
egenverdier = eig(A)
```

Dette gir følgende svar:

```
egenverdier =

         -2

         -1
```

Eksempel:

Finn egenverdiene til:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(svar: $s_1 = s_2 = 2$)

→ Bruk MathScript for å sjekke svaret

Eksempel:

Finn egenverdiene til:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

(svar: $s_1 = 0, s_2 = s_3 = 2$)

→ Bruk MathScript for å sjekke svaret

8.2 Determinant

Determinanten er bare definert for kvadratiske matriser. Determinanten til en kvadratisk matrise A er definert ved den skalare "tallverdien".

$$det(A) = |A|$$

8.2.1 2x2 Systemer

Slik finner vi determinanten for et 2x2 system:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{det(A) = |A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}$$

Eksempel:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = |A| = 3 \cdot 1 - 5 \cdot (-2) = 3 + 10 = \underline{\underline{13}}$$

I MathScript kan vi gjøre følgende:

```
A=[3 -2;5 1];
det(A)
rank(A)
```

Som gir følgende svar:

```
ans = 13 (determinant)

ans = 2 (rang)
```

[Slutt på eksempel]

8.2.2 3x3 Systemer

Det blir litt mer komplisert for systemer med større orden, men vi vil maks håndregne på 3x3 systemer. For større systemer bruker vi et dataprogram til å beregne dette, f.eks MathScript.

Slik finner vi determinanten for et 3x3 system:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Vi utvikler determinanten langs en rekke eller en kolonne.

Her utvikler vi determinanten langs første kolonne:

$$\boxed{\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}$$

Vi ser at determinanten til et høyere ordens system kan uttrykkes som en sum av lavere ordens determinanter.

Eksempel:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (-1) \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$$

Dette gir:

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 - (-20) = 18$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 0 = -6$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 0 = -15$$

Som gir:

$$\det(A) = -18 + 12 - 15 = \underline{\underline{-21}}$$

I MathScript kan vi gjøre følgende:

```
A=[-1 3 0; 2 1 -5; 1 4 -2];
det(A)
rank(A)
```

Som gir følgende svar:

```
ans = -21 (determinant)

ans = 3 (rang)
```

[Slutt på eksempel]

Referanser

Di Ruscio, D. (2003). Matrisemetoder og lineær algebra, Forelesningsnotater.

Di Ruscio, D. (2009). Linear Polynomial Estimator: The State Observer, Lecture notes.

Haugen, F. (1996). Regulering av dynamiske systemer 2, Tapir.

Haugen, F. (2010). Advanced Dynamics and Control, TechTeach.

Vaccaro, R. (1995). Digital Control – A State-space Approach, McGraw-Hill

www.wikipedia.org (2011). State Observer.

Hans-Petter Halvorsen, M.Sc.

E-mail: hans.p.halvorsen@hit.no

Blog: http://home.hit.no/~hansha/

University College of Southeast Norway

www.usn.no